Leçon n° 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Soit $\mathbb{K}$ un corps, n et $p \in \mathbb{N}^*$.

I/ De l'intersection d'hyperplans aux systèmes linéaires.

A/ Rencontre naturelle de systèmes linéaires. [ROM]

Théorème 1 : F de dimension r si et seulement si c'est l'intersection de $n-r$ hyperplans.

Remarque 2 : Un hyperplan = une équations à n inconnues, on a donc pour F un espace de dimension r, $n-r$ équations.

B/ Conditions d'existence et unicité des solutions. [GRIF]

Définition 3 : Système compatible et homogène.

Remarque 4 : On peut se ramener à $AX = B$ et on parle de rang du système par $\mathrm{rg}(A)$.

Exemple 5 : Exemple de système compatible et pas compatible.

Théorème 6 : Le système est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$ et S l'ensemble des solutions est un sous-espace affine dirigé par $\mathrm{Ker}(A)$ et de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$.

Application 7 : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\dim(\mathcal{C}(A)) \geq n$.

Définition 8 : Système de Cramer.

Proposition 9 : Une et une seule solution donnée par calcul de déterminant.

C/ Cas des matrices triangulaires. [CIA]

Proposition 10 : Méthode de la remontée en $O(n^2)$ opérations élémentaires dans le corps de base.

Remarque 11 : On cherche donc après des opérations dites élémentaires sur la matrice à se ramener à une matrice triangulaire et utiliser la méthode de la remontée.

II/ Résolution pratique d'un système linéaire.

A/ Algorithme du pivot de Gauss. [OBJ] [GRIF] [CAL]

Proposition 12 : L'ensemble des solutions ne change pas après opérations élémentaires sur A.

Définition 13 : Matrices de transvection, dilatation, transposition.

Proposition 14 : Multiplication à gauche = agir sur les lignes, multiplication à droite = agir sur les colonnes.

Définition 15 : Matrice échelonnée en ligne.

Exemple 16 : Exemple de telle matrice.

Définition 17 : Action par translation à gauche $(P, A) \mapsto PA$.

Théorème 18 : Action sur les lignes et on a toujours une forme échelonnée réduite dans une orbite.

Application 19 : Algo de pivot de Gauss => se ramener à échelonnée réduite par opérations élémentaires.

Exemple 20 : Exemple de passage de matrice à échelonnée réduite.

Remarque 21 : $\mathrm{rg}(A)$ pivots donc le reste donne les conditions de compatibilité.

Application 22 : Calcul en $O(n^3)$ opérations élémentaires de $\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A)$, $\det(A)$ et A^{-1}.

B/ Factorisation LU. [ROM] [CIA]

Proposition 23 : Factorisation LU.

Application 24 : $O(n^3)$ opérations pour n systèmes linéaires avec même matrice A au lieu de $O(n^4)$ opérations pour le pivot de Gauss.

C/ Applications du pivot de Gauss. [ROM] [GRIF] [FGNAlg2]

Développement 1

Théorème 25 : Ici, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Générateurs de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Application 26 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Application 27 : Déterminer si une famille est libre.

Application 28 : Déterminer les équations vérifiant un sev.

Application 29 : Vérifier si un vecteur $v \in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$.

Application 30 : Vérifier si $\{v_1,\dots,v_p\}$ est génératrice.

Application 31 : Déterminer une base de $F\cap G$ et $F+G$ à partir d'une base de F et d'une base de G.

D/ Le cas d'un anneau A euclidien. [OBJ]

Développement 2

Proposition 32 : Forme normale de Smith : existence et unicité.

Remarque 33 : Variante du pivot sur $\mathbb{Z}$.

Application 34 : Théorème de structure des groupes abéliens finis.

III/ Résolution numérique de systèmes par méthode itérative. [ALL]

Définition 35 : Méthode itérative qui converge.

Proposition 36 : Méthode itérative converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N)<1$.

Définition 37 : Méthode de Jacobi et Gauss-Seidel.

Proposition 38 : Convergence des deux méthodes si A est à diagonale fortement dominante.

Références :

— [ROM] Rombaldi p. 451
— [GRIF] Grifone Algèbre linéaire p. 141-148
— [CIA] Ciarlet Introduction à l'analyse numérique matricielle p. 82-90
— [CAL] Caldéro Nouvelles Histoires Hédonistes tome 1 p. 203, p. 213
— [FGNAlg2] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 2 p. 177
— [ALL] Allaire Analyse numérique p. 428
— [OBJ] Beck Malick Peyré Objectif Agrégation p. 186, p. 285